SP 9 – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS COM PYTHON

PROBLEMA 1 – "O Volume da Torre de Hanói"

A "Torre de Hanói" é um quebra-cabeças constituído por três hastes e um conjunto de discos (Fig. 1).

Os discos, perfurados ao centro, são colocados na primeira haste, por ordem decrescente do raio, formando assim uma torre. O objetivo consiste em deslocar a torre da primeira para a terceira haste, movendo um disco de cada vez, não sendo permitido colocar um disco maior sobre um menor.

Uma das lendas associadas a este jogo é a existência de um mosteiro budista onde vários monges estariam a resolver um puzzle destes com 64 discos e, quando terminassem, o mundo acabaria.

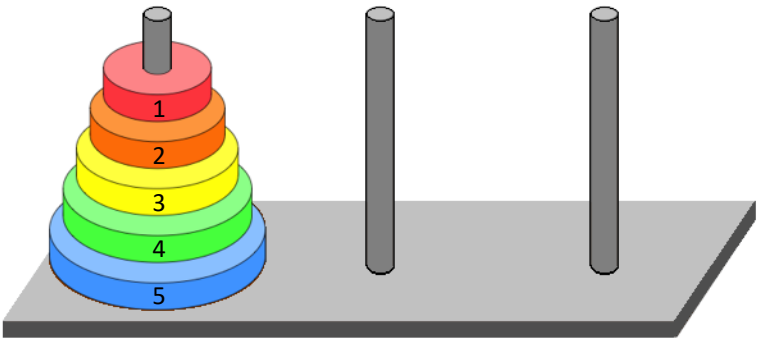


Figura 1 – Torre de Hanói com 5 discos

Considere um conjunto de discos com as seguintes características (Fig. 2):

- *o primeiro disco tem 2 cm de raio;*
- *os raios dos discos estão em progressão aritmética de razão 1;*
- *cada disco tem 1 cm de altura;*
- *o furo de cada disco tem 1 cm de raio.*

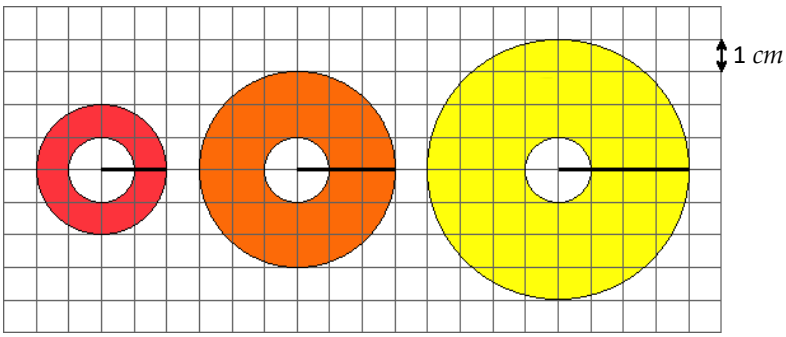


Figura 2 – Primeiros três discos vistos de cima

1. Qual seria o volume de uma Torre de Hanói com 64 discos perfurados, arredondado às unidades?
2. Qual seria o número mínimo de discos perfurados necessários para construir uma Torre de Hanói com um volume superior a 1 m^3?

ANTES DE RESOLVER O PROBLEMA 1

Exemplo

Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 7\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Como escrever os 5 primeiros termos da sucessão (u_n)?

Versão 1 – Escrever apenas os termos

Editor		Shell
01	`u = 3`	`3`
02	`print(u)`	`10`
03	`for i in range(4):`	`17`
04	`  u = u+7`	`24`
05	`  print(u)`	`31`
		`>>>`

Repare: A instrução `for i in range(n)` permite repetir um conjunto de instruções n vezes. Neste caso, a instrução `for i in range(4)` permite repetir 4 vezes as linhas indentadas 04 e 05.

Questão 1: Que alterações seriam necessárias para escrever os 20 primeiros termos da sucessão (v_n) definida por: $\begin{cases} v_1 = 50 \\ v_{n+1} = v_n - 8\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$?

Versão 2 – Escrever a ordem e os termos

Editor		Shell
01	`u = 3`	`1 | 3`
02	`print("1 |",u)`	`2 | 10`
03	`for i in range(2,6):`	`3 | 17`
04	`  u = u+7`	`4 | 24`
05	`  print(i,"|",u)`	`5 | 31`
		`>>>`

Repare: Numa instrução do tipo `for i in range(a,b)`, a variável `i` assume sucessivamente os valores inteiros de a até $b-1$. Neste caso, a instrução `for i in range(2,6)` faz com que as linhas indentadas 04 e 05 sejam executadas 4 vezes: para `i=2`, `i=3`, `i=4` e `i=5`.

Questão 2: Que alterações seriam necessárias para escrever os 30 primeiros termos da sucessão (v_n) definida por: $\begin{cases} v_1 = -2 \\ v_{n+1} = v_n + 0{,}125\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$?

Versão 3 – Escrever a ordem e os termos, usando o termo geral

$u_n = u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = 3 + (n-1)\times 7 \Leftrightarrow u_n = 7n - 4$

Editor		Shell
01	`for i in range(1,6):`	`1 | 3`
02	`  u = 7*i - 4`	`2 | 10`
03	`  print(i,"|",u)`	`3 | 17`
		`4 | 24`
		`5 | 31`
		`>>>`

Questão 3: Que alterações seriam necessárias para escrever os 40 primeiros termos da sucessão (v_n) definida por $v_n = n^2 + 1$?

2. Como calcular a soma dos 5 primeiros termos da sucessão (u_n)?

Versão 4 – Escrever as sucessivas somas

Editor		Shell
01	`soma = 0`	`1 | 3`
02	`for i in range(1,6):`	`soma = 3`
03	`  u = 7*i - 4`	`2 | 10`
04	`  print(i,"|",u)`	`soma = 13`
05	`  soma = soma + u`	`3 | 17`
06	`  print("soma =",soma)`	`soma = 30`
		`4 | 24`
		`soma = 54`
		`5 | 31`
		`soma = 85`
		`>>>`

Repare: A variável `soma` tem de ser *inicializada* (linha 01) antes do ciclo; caso contrário, obter-se-ia um erro na linha 05 em que a instrução `soma = soma + u` requer "o valor anterior da soma".

Versão 5 – Escrever apenas a soma no final

Editor		Shell
01	`soma = 0`	`1 | 3`
02	`for i in range(1,6):`	`2 | 10`
03	`  u = 7*i - 4`	`3 | 17`
04	`  print(i,"|",u)`	`4 | 24`
05	`  soma = soma + u`	`5 | 31`
06	`print("soma =",soma)`	`soma = 85`
		`>>>`

Repare: Como a linha 06 não está indentada, ela é executada apenas uma vez, após o ciclo *for*.

Alternativa: Após confirmar que o programa está a funcionar corretamente (visto que devolve o valor esperado, 85), pode optar-se por escrever apenas a soma, *desativando* o `print` da linha 04. Para isso, pode transformar-se essa linha em *comentário*, usando o símbolo #.

	Editor	Shell
01	`soma = 0`	`soma = 85`
02	`for i in range(1,6):`	`>>>`
03	`  u = 7*i - 4`	
04	`  # print(i,"|",u)`	
05	`  soma = soma + u`	
06	`print("soma =",soma)`	

Questão 4: Qual é a soma dos 20 primeiros termos da sucessão (v_n) definida por: $\begin{cases} v_1 = 4 \\ v_{n+1} = 2 \times v_n \end{cases}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$?

3. Como calcular o valor mínimo de *k* para o qual $u_1 + u_2 + \ldots + u_k > 100$?

Versão 6 – Escrever os termos até que a soma ultrapasse 100

	Editor	Shell
01	`i = 0`	`1 | 3 | S = 3`
02	`soma = 0`	`2 | 10 | S = 13`
03	`while soma <= 100:`	`3 | 17 | S = 30`
04	`  i = i+1`	`4 | 24 | S = 54`
05	`  u = 7*i - 4`	`5 | 31 | S = 85`
06	`  soma = soma + u`	`6 | 38 | S = 123`
07	`  print(i,"|",u,"| S =",soma)`	`k = 6`
08	`print("k =",i)`	`>>>`

Repare: Neste caso, é necessário acrescentar uma variável `i` para representar a ordem.

Questão 5: Considere a sucessão (v_n) definida por $v_n = n^2 - n$.

Qual é o valor mínimo de *k* para o qual $v_1 + v_2 + \ldots + v_k > 1000$?

(Página seguinte: "Pistas" para resolver o Problema 1)

PROBLEMA 1 – "PISTAS"

1. **a)** Comece por considerar uma Torre de Hanói com 5 discos.

Preencha a tabela seguinte de modo a obter o volume de cada disco perfurado.

Ordem do disco	Raio (cm)	Volume (cm^3)
1	2	
2		
3		
4		
5		

Qual é o volume total desta Torre de Hanói, arredondado às unidades?

b) Considere a sucessão (v_n), formada pelos volumes dos discos perfurados.

Qual é o termo geral desta sucessão, ou seja, o volume do disco de ordem n?

c) Crie um programa que escreva o volume dos cinco primeiros discos.

Nota: Para poder utilizar a constante `pi`, escreva a instrução `from math import *` no início do programa, de modo a importar o módulo *math*.

Quando executa o programa, obtém o resultado esperado?

d) Altere o programa de modo a calcular o volume total de uma Torre de Hanói com 5 discos.

Quando executa o programa, obtém o resultado esperado?

e) Altere o programa de modo a descobrir o volume total com 64 discos.

2. **a)** Crie um programa que determine quantos discos são necessários para que o volume da Torre de Hanói seja superior a 100 cm^3.

Quando executa o programa, obtém o resultado esperado?

b) Altere o programa de modo a descobrir o número mínimo de discos perfurados necessários para construir uma Torre de Hanói com um volume superior a 1 m^3.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

1. **a)** Preenchimento da tabela:

Ordem do disco	Raio (cm)	Volume (cm^3)
1	2	$\pi \times 2^2 \times 1 - \pi \times 1^2 \times 1 = 4\pi - \pi = 3\pi \approx 9{,}424777961$
2	3	$\pi \times 3^2 - \pi = 8\pi \approx 25{,}13274123$
3	4	$\pi \times 4^2 - \pi = 15\pi \approx 47{,}1238898$
4	5	$\pi \times 5^2 - \pi = 24\pi \approx 75{,}39822369$
5	6	$\pi \times 6^2 - \pi = 35\pi \approx 109{,}9557429$

O volume total é igual a $3\pi + 8\pi + 15\pi + 24\pi + 35\pi = 85\,\pi \approx 267\ cm^3$.

b) O disco de ordem n tem um raio igual a $(n + 1)\ cm$.

Assim, a sucessão dos volumes, (v_n), tem por termo geral:

$$v_n = \pi \times (n + 1)^2 - \pi = (n^2 + 2n)\,\pi.$$

c) Apresentam-se duas opções para escrever o volume dos cinco primeiros discos:

Opção 1 – Usando a sucessão dos volumes, definida pelo termo geral:

Editor		Shell
01	`from math import*`	`1 | 9.42477796076938`
02	`for i in range(1,6):`	`2 | 25.132741228718345`
03	`  v = (i**2+2*i)*pi`	`3 | 47.12388980384689`
04	`  print(i,"|",v)`	`4 | 75.39822368615503`
		`5 | 109.95574287564276`
		`>>>`

Opção 2 – Usando a sucessão dos raios, definida por recorrência:

Editor		Shell
01	`from math import*`	`9.42477796076938`
02	`r = 2`	`25.132741228718345`
03	`for i in range(5):`	`47.12388980384689`
04	`  v = pi*r**2 - pi`	`75.39822368615503`
05	`  print(v)`	`109.95574287564276`
06	`  r = r + 1`	`>>>`

Nota: É ainda possível criar um programa, definindo a sucessão dos volumes por recorrência:

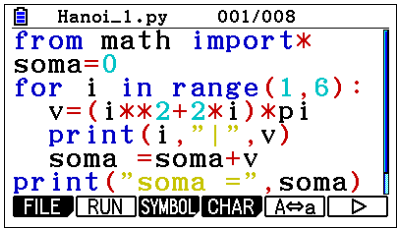
$$\begin{cases} v_1 = 3\pi \\ v_n = v_{n-1} + (2n + 1)\pi\,, \quad \forall\, n \geq 2 \end{cases}$$

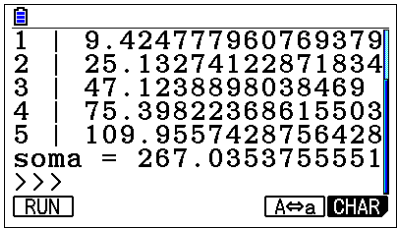
d) Programa que calcula o volume total de uma Torre de Hanói com 5 discos, usando a sucessão dos volumes definida pelo termo geral (**Opção 1**).

Editor		Shell
01	`from math import*`	`1 | 9.42477796076938`
02	`soma = 0`	`2 | 25.132741228718345`
03	`for i in range(1,6):`	`3 | 47.12388980384689`
04	`  v = (i**2+2*i)*pi`	`4 | 75.39822368615503`
05	`  print(i,"|",v)`	`5 | 109.95574287564276`
06	`  soma = soma + v`	`soma = 267.0353755551324`
07	`print("soma =",soma)`	`>>>`

Observa-se que o programa devolve a resposta esperada.

CASIO fx-CG50:

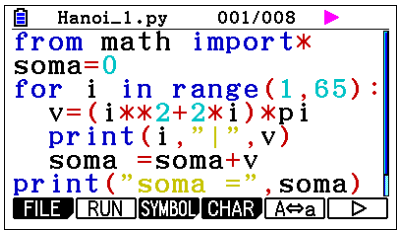


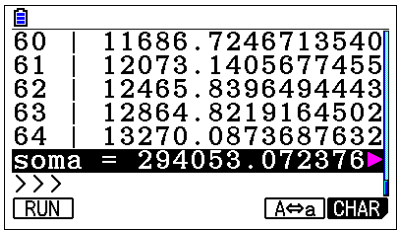


e) Programa que calcula o volume total de uma Torre de Hanói com 64 discos:

Editor		Shell
01	`from math import*`	`60 | 11686.72467135403`
02	`soma = 0`	`61 | 12073.140567745575`
03	`for i in range(1,65):`	`62 | 12465.839649444299`
04	`  v = (i**2+2*i)*pi`	`63 | 12864.821916450202`
05	`  print(i,"|",v)`	`64 | 13270.087368763287`
06	`  soma = soma + v`	`soma = 294053.0723760046`
07	`print("soma =",soma)`	`>>>`

CASIO fx-CG50:





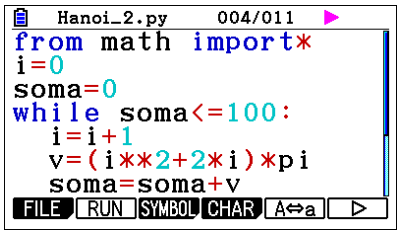
Conclui-se que uma Torre de Hanói com 64 discos teria um volume de, aproximadamente, 294 053 cm^3.

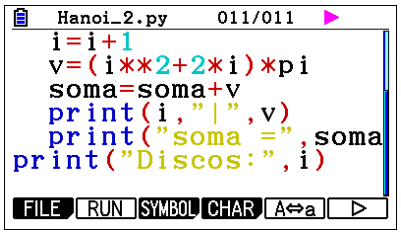
2. **a)** Programa que determina quantos discos são necessários para que o volume da Torre de Hanói seja superior a 100 cm^3:

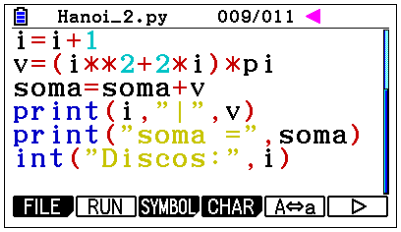
Editor		Shell
01	`from math import*`	`1 | 9.42477796076938`
02	`i = 0`	`soma = 9.42477796076938`
03	`soma = 0`	`2 | 25.132741228718345`
04	`while soma <= 100:`	`soma = 34.55751918948772`
05	`  i = i+1`	`3 | 47.12388980384689`
06	`  v = (i**2+2*i)*pi`	`soma = 81.68140899333461`
07	`  soma = soma + v`	`4 | 75.39822368615503`
08	`  print(i,"|",v)`	`soma = 157.07963267948963`
09	`  print("soma =",soma)`	`Discos: 4`
10	`print("Discos:",i)`	`>>>`

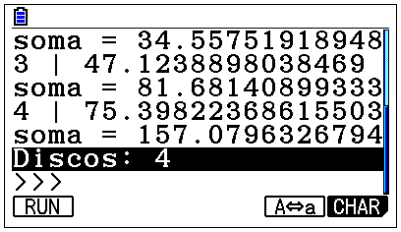
Observa-se que o programa devolve a resposta esperada (4 discos).

CASIO fx-CG50:





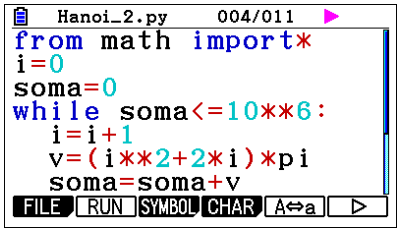


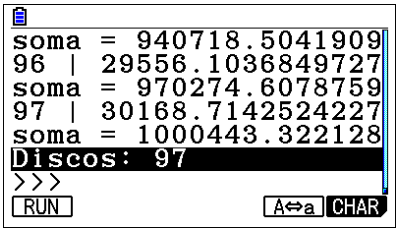


b) Programa que determina quantos discos são necessários para que o volume da Torre de Hanói seja superior a 1 m^3, ou seja, 10^6 cm^3:

Editor		Shell
01	`from math import*`	`94 | 28349.73210599429`
02	`i = 0`	`soma = 911768.7278880978`
03	`soma = 0`	`95 | 28949.776302829945`
04	`while soma<=10**6:`	`soma = 940718.5041909277`
05	`  i = i+1`	`96 | 29556.103684972775`
06	`  v = (i**2+2*i)*pi`	`soma = 970274.6078759005`
07	`  soma = soma + v`	`97 | 30168.714252422782`
08	`  print(i,"|",v)`	`soma = 1000443.3221283233`
09	`  print("soma =",soma)`	`Discos: 97`
10	`print("Discos:",i)`	`>>>`

CASIO fx-CG50:





Conclui-se que são necessários 97 discos perfurados para que o volume da Torre de Hanói seja superior a 1 m^3.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROBLEMA 1

1. Contextualização nas Aprendizagens Essenciais

- Matemática A: 11º ano – Tema "Matemática discreta", tópico "Sucessões".
- Cursos profissionais: Módulo (opcional) OP5 "Modelos discretos".

2. Pensamento computacional

Durante a resolução do problema "Volume da Torre de Hanói", os alunos desenvolvem as cinco práticas associadas ao pensamento computacional.

- ***Abstração*** *(simplificar a tarefa; selecionar as informações essenciais para resolver o problema em estudo, ignorando as restantes)*

  Neste caso, uma das primeiras etapas do processo de resolução consiste em relacionar o volume da Torre de Hanói com a **soma dos termos de uma sucessão**.

- ***Decomposição*** *(dividir a tarefa em partes menores e mais fáceis de resolver)*

  Neste caso, a resolução da tarefa pode ser decomposta em duas etapas:

  1º Escrever os termos da sucessão;

  2º Calcular a soma de n termos.

- ***Reconhecimento de padrões*** *(reconhecer regularidades e relações)*

  Neste caso, é necessário identificar a regularidade associada ao volume dos discos perfurados para determinar o **termo geral da sucessão** ou definir a sucessão por recorrência.

- ***Algoritmia*** *(desenvolver uma solução passo a passo)*

  Questão 1:

```
01 | importar módulo math
02 | soma ← 0
03 | para i de 1 até 64
04 |     u ← (i² + 2i)π
05 |     escrever u
06 |     soma ← soma + u
07 | escrever soma
```

Questão 2:

```
01  importar módulo math
02  i ← 0
03  soma ← 0
04  enquanto soma ≤ 10^6
05      i ← i + 1
06      u ← (i^2 + 2i)π
07      soma ← soma + u
08      escrever u
09      escrever soma
10  escrever n.º de discos
```

- ***Depuração*** *(detetar e corrigir erros; testar; otimizar o programa)*

  Desde a escrita das primeiras linhas de código até à finalização do programa, os erros de sintaxe ou de semântica são **inevitáveis**. A correção de erros deve ser encarada com normalidade.

  Por outro lado, é importante testar o programa. Neste caso, numa primeira fase, os programas foram criados para responder às questões para uma Torre de Hanói com cinco discos. Em cada caso, foram utilizadas instruções *print* para verificar que os programas devolviam os **resultados esperados**. Numa segunda fase, foram alterados os programas para responder às questões colocadas no problema.

  Por último, para otimizar os programas, nomeadamente, ao nível do tempo de execução, pode optar-se por retirar algumas instruções *print* ou convertê-las em *comentários*, conforme foi exemplificado na proposta de resolução.

3. Aprofundamento

Nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática A* para o 11º ano, é referido o "Aprofundamento do estudo de Sucessões com trabalho de projeto" (pág. 19). Um dos *objetivos de aprendizagem* é "conhecer, aplicar e criar modelos presentes nas sucessões, tirando partido da tecnologia".

Assim, no seguimento desta tarefa, poderá ser sugerido o estudo da sucessão de termos geral $2^n - 1$ associada às Torres de Hanói.

Os alunos podem experimentar o jogo "Torre de Hanói" em hypatiamat.com:

https://www.hypatiamat.com/jogos/torreHanoi/torreHanoi_HTML.html

Manuel Marques – Grupo CASIO + da APM

■